سیستم مورد مطالعه ، سیستم توپ و میله می باشد که برای هدف کنترلی ها مختلف با استفاده از Toolbox کنترل متلب شبیه سازی شده است.

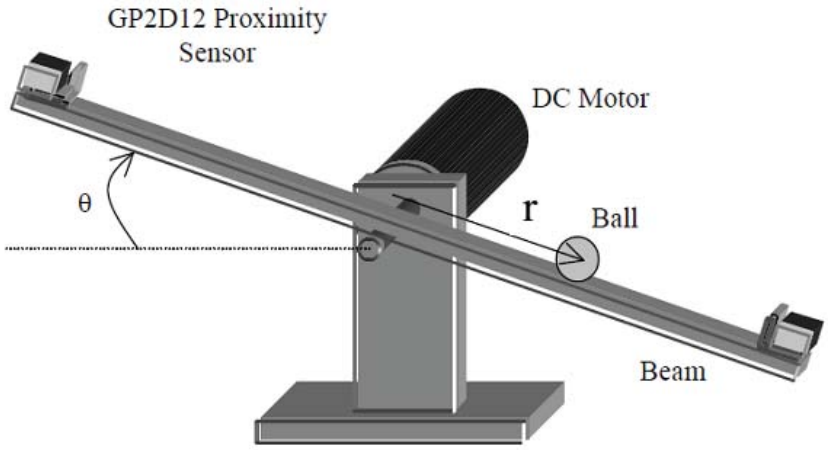


Figure 1: Ball and Beam Apparatus

1 -مدل سیستم

2 -معادلات حالت سیستم

3 -کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم

4 -نقطه تعادل

5 -شرایط اولیه

6 -تابع تبدیل سیستم

7 -جابجایی قطب

8 -طراحی رویتگر

9 -طراحی کنترل کننده

m = 0.11 kg
R = 0.015 m
M = 1 kg

g = 9.8 m/s^2
L = 1.0 m
J= 1e-5 kgm^2
J = 2e-3

دستورات مورد استفاده در این پروژه

acker	eig	obsv
canon	estim	obsvf
ctrb	initial	place
ssdata	ss2ss	ss
ss2tf	tf2ss	

معادلات حالات سیستم توپ و میله

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}+(J_R/R^2).\dot{r}-(J_R/R).\dot{\theta})+mg.\sin\theta-mr\dot{\theta}^2=0$$

$$\Rightarrow (m+(J_R/R^2))\ddot{r}-(J_R/R)\ddot{\theta}=-mg\sin\theta+mr\dot{\theta}^2$$

θ :

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}+mr^2\dot{\theta}+J_R\dot{\theta}-(J_R/R).\dot{r})+mgr\cos\theta=\tau_u$$

$$\Rightarrow -(J_R/R).\ddot{r}+(J+mr^2+J_R)\ddot{\theta}=\tau_u-2mr\dot{r}\dot{\theta}-mgr\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} m+\frac{J_R}{R^2} & -\frac{J_R}{R} \\ -\frac{J_R}{R} & mr^2+J+J_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{r}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} mr\dot{\theta}^2-mg\sin\theta \\ \tau-2mr\dot{r}\dot{\theta}-mgr\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{r}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(mr^2+J+J_R)(mr\dot{\theta}^2-mg\sin\theta)+(\frac{J_R}{R})(\tau-2mr\dot{r}\dot{\theta}-mgr\cos\theta)\\ (\frac{J_R}{R})(mr\dot{\theta}^2-mg\sin\theta)+(m+\frac{J_R}{R^2})(\tau-2mr\dot{r}\dot{\theta}-mgr\cos\theta\end{bmatrix}/\det(M)$$

$$\det(M)=(m(J+J_R)+m(m+\frac{J_R}{R^2})r^2+\frac{JJ_R}{R^2})$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt} r = v_r \\
\dfrac{d}{dt} v_r = [(J + mr^2 + J_R)(mr\omega^2 - mg\sin\theta) + \dfrac{J_R}{R}(\tau_u - 2mrv_r\omega - mgr\cos\theta)] / \det(M) \\
\dfrac{d}{dt}\theta = \omega \\
\dfrac{d}{dt}\omega = [\dfrac{J_R}{R^2}(mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta) + (m + \dfrac{J_R}{R^2})(\tau_u - 2mrv_r\omega - mgr\cos\theta)] / \det(M)
\end{cases}
$$

$$
x_1 = r, x_2 = v_r, x_3 = \theta, x_4 = \omega
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\dfrac{-\dfrac{J_R}{R}.mg}{m(J+J_R)+\dfrac{JJ_R}{R^2}} & 0 & \dfrac{-(J+J_R).mg}{m(J+J_R)+\dfrac{JJ_R}{R^2}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\dfrac{-(m+\dfrac{J_R}{R^2}).mg}{m(J+J_R)+\dfrac{JJ_R}{R^2}} & 0 & \dfrac{-\dfrac{J_R}{R}.mg}{m(J+J_R)+\dfrac{JJ_R}{R^2}} & 0
\end{bmatrix},
\qquad
B = \begin{bmatrix}
0 \\
\dfrac{\dfrac{J_R}{R}}{m(J+J_R)+\dfrac{JJ_R}{R^2}} \\
0 \\
\dfrac{m+\dfrac{J_R}{R^2}}{m(J+J_R)+\dfrac{JJ_R}{R^2}}
\end{bmatrix}
$$

نتایج حاصل از شبیه‌سازی

معادلات حالت

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.318363 & 0 & -6.989863 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -537.0874 & 0 & -2.318363 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 2.1506 \\ 0 \\ 498.2257 \end{bmatrix} \quad C=[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

دستور **ctrb**:

هدف محاسبه ماتریس کنترل‌پذیری

```
Co = ctrb(A,B)
 rank(Co)
```

چون رتبه این ماتریس کامل بوده پس کنترل پذیر است

```
Co =

  1.0e+003 *

       0    0.0022         0   -3.4875
  0.0022         0   -3.4875         0
       0    0.4982         0   -2.3101
  0.4982         0   -2.3101         0


ans =

     4
```

دستور obsv:

هدف محاسبه ماتریس رویت پذیری

```
Ob=obsv(A,C)
rank(Ob)
```

چون به ازای تمام ورودی رتبه کامل است

پس مشاهده پذیر است

```
C=[1 0 1 0];
rank(obsv(A,C))
ans =
4
C=[0 1 0 1];
rank(obsv(A,C))
ans =
4
C=[1 0 0 0];
rank(obsv(A,C))
ans =
4
C=[0 0 1 0];
rank(obsv(A,C))
ans =
4
C=[1 0 0 1];
rank(obsv(A,C))
ans =
4
C=[0 1 1 0];
rank(obsv(A,C))
ans =4
```

دستور eig: یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

```
eig (A)
damp (eig (A))
```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-7.68e+000	1.00e+000	7.68e+000
2.78e-017 + 7.97e+000i	-3.48e-018	7.97e+000
2.78e-017 - 7.97e+000i	-3.48e-018	7.97e+000
7.68e+000	-1.00e+000	7.68e+000

دستور acker:

هدف طراحی جایابی قطب‌ها برای سیستم‌های تک ورودی

```
k = acker(A,B,[-2+2j,-2-2j,-7,-7])
```

```
k =
-1.1907   -0.0886    0.2226    0.0365
```

مقادیر ویژه

```
eig(A-B*k)
```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-7.00e+000 + 3.19e-007i	1.00e+000	7.00e+000
-7.00e+000 - 3.19e-007i	1.00e+000	7.00e+000
-2.00e+000 + 2.00e+000i	7.07e-001	2.83e+000
-2.00e+000 - 2.00e+000i	7.07e-001	2.83e+000

دستور ss:

هدف تعریف مدل فضای حالت یا تبدیل یک مدل LTI به فضای حالت

```
sys1=ss(A,B,C,D)
```

```
a =
       x1     x2     x3     x4
  x1      0      1      0      0
  x2 -2.318      0  -6.99      0
  x3      0      0      0      1
  x4 -537.1      0 -2.318      0

b =
       u1
  x1     0
  x2 2.151
  x3     0
  x4 498.2

c =
     x1  x2  x3  x4
  y1   1   0   0   0

d =
     u1
  y1   0

Continuous-time model.
```

دستور ss2tf:

هدف تبدیل مدل فضای حالت سیستم به تابع تبدیل

```
[num,den]= ss2tf(A,B,C,D)
```

```
num =

  1.0e+003 *

       0    0.0000    0.0022    0.0000   -3.4775


den =

  1.0e+003 *

    0.0010   -0.0000    0.0046   -0.0000   -3.7488
```

```
sys2=tf(num,den)
```

```
Transfer function:
   4.441e-015 s^3 + 2.151 s^2 + 1.08e-012 s - 3478
----------------------------------------------------
s^4 - 6.217e-015 s^3 + 4.637 s^2 - 3.979e-013 s - 3749
```

دستور tf2ss:

هدف به دست آوردن مدل فضای حالت از روی تابع تبدیل سیستم

```
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

```
A =

  1.0e+003 *

    0.0000   -0.0046    0.0000    3.7488
    0.0010         0         0         0
         0    0.0010         0         0
         0         0    0.0010         0

B =

     1
     0
     0
     0

C =

  1.0e+003 *

    0.0000    0.0022    0.0000   -3.4775

D =

     0
```

```
[a,b,c,d] = ssdata(sys2)
```

دستور ssdata:

هدف دسترسی به ماتریس‌های a، b، c، d

فضای حالت از روی مدل سیستم

```
a =

    0.0000   -0.5796    0.0000   14.6437
    8.0000         0         0         0
         0    4.0000         0         0
         0         0    8.0000         0


b =

    4
    0
    0
    0


c =

    0.0000    0.0672    0.0000   -3.3960


d =

    0
```

دستور obsvf

هدف جدا کردن حالت‌های رویت ناپذیر و رویت پذیر سیستم

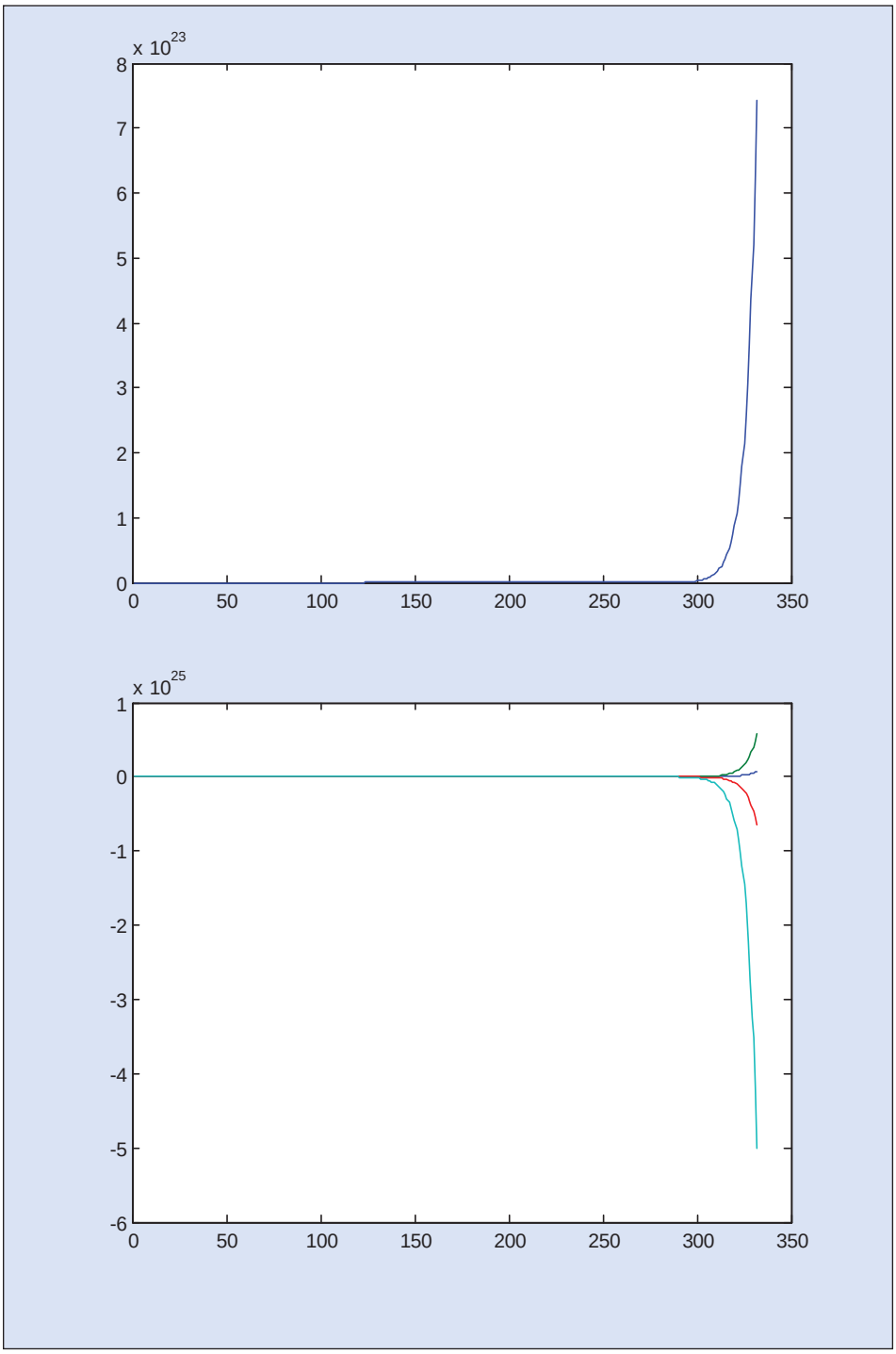
```
[Abar,Bbar,Cbar,T,k] = obsvf(A,B,C)
```

```
Abar =
  1.0e+003 *
   -0.0000    0.0023   -0.0000   -3.7488
   -0.0010    0.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0010   -0.0000   -0.0023
    0.0000    0.0000    0.0010   -0.0000
Bbar =

    1.0000
    0.0000
    0.0006
         0
Cbar =
  1.0e+003 *

    0.0000         0    0.0000    3.4775
T =
    1.0000    0.0000    0.0006   -0.0000
    0.0000   -1.0000   -0.0000   -0.0006
    0.0006    0.0000   -1.0000   -0.0000
         0    0.0006    0.0000   -1.0000



k =
     1     1     1     1
```

دستور initial:

هدف محاسبه پاسخ سیستم به شرایط اولیه

```
x0=[ 0.2 0.05 1 0.01 ]

 [y,t,x] = initial(sys1,x0)
```



طراحی جایاب قطب برای سیستم های چند ورودی

```
p=eig(A-B*k)
[K,prec,message] = place(A,B,p)
L= place(A',C',p)
```

```
p =

  -7.9010

  -0.2569 + 7.9941i

  -0.2569 - 7.9941i

   7.4149

K =

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000


prec =


    13


message =



L =


  1.0e-003 *


    0.3786    0.3786   -0.2873   -0.2873
```

```
csys = canon(sys1,'modal')
```

محاسبه تحقق‌های استاندارد در فضای حالت

```
a =
       x1     x2     x3     x4
  x1 -7.678      0      0      0
  x2      0      0  7.974      0
  x3      0 -7.974      0      0
  x4      0      0      0  7.678

b =
       u1
  x1 0.9153
  x2  -1.22
  x3 0.6196
  x4 0.9153

c =
       x1     x2     x3     x4
  y1 1.945  1.224   2.41 -1.945

d =
     u1
  y1  0
```

```
csys = canon(sys1,'companion')
```

```
a =
       x1    x2    x3     x4
  x1    0     0     0   3749
  x2    1     0     0      0
  x3    0     1     0  -4.637
  x4    0     0     1      0

b =
     u1
  x1  1
  x2  0
  x3  0
  x4  0

c =
       x1    x2    x3     x4
  y1    0 2.151     0  -3488

d =
     u1
  y1  0
```

```
est = estim(sys1,L',1,1)
```

```
a =
          x1_e       x2_e
  x1_e  -0.0003786         1
  x2_e     -2.319         0
  x3_e   0.0002873         0
  x4_e     -537.1         0

          x3_e       x4_e
  x1_e         0          0
  x2_e     -6.99          0
  x3_e         0          1
  x4_e     -2.318          0

 b =
           u1         y1
  x1_e         0   0.0003786
  x2_e     2.151   0.0003786
  x3_e         0  -0.0002873
  x4_e     498.2  -0.0002873

 c =
       x1_e  x2_e  x3_e  x4_e
  y1_e    1     0     0     0
  x1_e    1     0     0     0
  x2_e    0     1     0     0
  x3_e    0     0     1     0
  x4_e    0     0     0     1

 d =
       u1  y1
  y1_e   0   0
  x1_e   0   0
  x2_e   0   0
  x3_e   0   0
  x4_e   0   0

 Input groups:
      Name        Channels
    KnownInput        1
    Measurement       2

Output groups:
        Name         Channels
    OutputEstimate       1
    StateEstimate     2,3,4,5
```